Exercice 1 ***(5 points)***

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment. *Les résultats seront donnés* ***sous forme décimale en arrondissant à*** 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- *La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de* $0,99$ *(sensibilité du test).*
- *La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de* $0,97$ *(spécificité du test).*

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V *l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et* T *l'évènement « le test est positif ».*
$\overline{V}$ *et* $\overline{T}$ *désignent respectivement les évènements contraires de* V *et* T.

1. (a) *Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.*
   (b) *En déduire la probabilité de l'évènement* $V \cap T$.

2. *Démontrer que la probabilité que le test soit positif est* $0,0492$.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X *la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.*

1. *Justifier que* X *suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.*
2. *Calculer la probabilité qu'aucune personne ne soit contaminée parmi les 10.*
3. *Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.*
4. *Calculer l'espérance de* X. *Interpréter ce résultat pour 50 000 personnes.*

Exercice 2 *(3 points)*

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$.

1. *Vérifier que $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$.*
2. *Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 4$.*

Exercice 3 *(4 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 16x^2 - 48x + 15$.

1. (a) *Déterminer $f'(x)$.*

   (b) *Vérifier que $f'(x) = (4x-12)(x+2)^2$.*
2. *Dresser le tableau de signe de f'. Construire alors le tableau de variation de f.*
3. *En déduire les extremums locaux de f.*
4. *Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[-2;3]$ et sur $[-1;1]$.*

Exercice 4 *(3 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.

1. *On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+1}$. Alors :*

   a. $f'(x) = 2x - 2$ ***b.*** *la courbe de f admet deux tangentes horizontales* ***c.*** $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

2. *A et B sont deux événements tels que P(A)= 0,7 P(B)= 0,4 et $P(A \cap B)$= 0,3. Alors :*

   a. $P(A \cap \bar{B}) = 0,1$ ***b.*** $P(\bar{A} \cap B) = 0,4$ ***c.*** $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2$

3. *Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On y prélève au hasard ,l'une après l'autre avec remise, 10 boules. La probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche est de :*

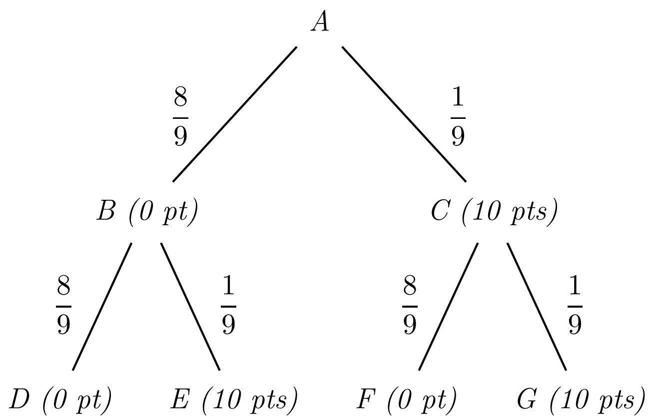
   a. $(\dfrac{3}{8})^{10}$ ***b.*** $0,990905$ ***c.*** $0,05457$

Exercice 5 ***(2 points)***

Dans une plaque de carton carrée de 12 cm de côté, on découpe des carrés aux quatres coins afin de construire une boite sans couvercle.
Comment faire pour obtenir une boite de volume maximal ?
Toute trace de recherche sera prise en compte.

Exercice 6 ***(4 points)***

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. *Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.*
   (a) *Déterminer la loi de probabilité de X.*
   (b) *Calculer l'espérance de X.*
2. *Le joueur effectue n parties et on suppose que ces parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.*
   (a) *On suppose que $n = 8$. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.*
   (b) *On suppose que n est un entier naturel non nul.*
   Montrer que la probabilité qu'il gagne au moins une partie est $1 - (\frac{80}{81})^n$.